第六次习题课

王瑞

April 7, 2022

My thesis is simply this: probability does not exist. – Bruno de Finetti

1 正态分布

例 1.1 ***(正态分布的对称性)*** 如果随机变量 X 服从期望为 -1 正态分布, 已知 $P(X \leq -2.96) = 0.025$, 求 $P(X \leq 0.96)$.

例 1.2 ***(Stein 引理)*** 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 另 g 是一个可微的函数, 而且满足 $E|g'(X)| \leq \infty$, 那么我们有

$$E[g(X)(X-\mu)] = \sigma^2 E g'(X). \tag{1}$$

例 1.3 ***(正态分布的高阶矩)*** 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试求 EX^3

例 1.4 ***(正态分布的集中不等式)*** 如果 Z 服从标准正态分布, 那么

$$P(|Z| \geq t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-t^2/2}}{t} \tag{2}$$

对所有的 $t > 0$. 请用该不等式估计 $P(|Z| \geq 2)$, 并与切比雪夫不等式的结果做比较.

例 1.5 ***(正态分布的矩母函数)*** 定义随机变量 X 的矩母函数为

$$M_X(t) = E[e^{tX}] \tag{3}$$

试求当 $X \sim (\mu, \sigma^2)$ 时的矩母函数.

2 随机变量函数的分布

例 2.1 设 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布, 证明 $\alpha X + \beta (\alpha > 0)$ 服从 $[a\alpha + \beta, b\alpha + \beta]$ 上的均匀分布.

例 2.2 设 X 服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布, 求 X^2 的分布函数和密度函数.

例 2.3 设 X 服从参数为 *1* 的指数分布, 求 $Y = \alpha X + \beta (\alpha > 0)$ 的分布函数和密度函数.

例 2.4 设 X 服从参数为 $1/\theta$ 的指数分布, 证明 $Y = \frac{2}{\theta} X$ 服从参数为 $1/2$ 的指数分布.

例 2.5 设 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 求 $Y = X^2$ 的分布

例 2.6 设 X 服从标准正态分布, 试求一下 Y 的密度函数:

1. $Y = 2X + 1$
2. $Y = |X|$
3. $Y = 2X^2 + 1$

References

[1] Casella, George, and Roger L. Berger. Statistical inference(2nd ed). Cengage Learning, 2002.

[2] 李贤平. " 基础概率论 (第三版)." (2010).

[3] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. " 概率论与数理统计 (第二版)." (2012).

[4] Keener, Robert W. Theoretical statistics: Topics for a core course. New York: Springer, 2010.