第七次习题课

王瑞

April 14, 2022

It’s easy to lie with statistics; it is easier to lie without them. –Frederick Mosteller

1 随机向量及其分布

例 1.1 *100 件产品中有 50 件一等品,30 件二等品和 20 件三等品. 从中任取 5 件, 以 X,Y 分别表示取出的 5 件中一等品和二等品的件数. 在以下情况下求出 (X,Y) 的联合分布列.*

1. 不放回抽取
2. 有放回抽取

例 1.2 随机向量均匀地分布在顶点为 $(-1,1)$,$(1,1)$,$(1,-1)$,$(-1,-1)$ 的正方形内, 求下列事件的概率

1. $X^2+Y^2<1$
2. $2X-Y>0$
3. $|X+Y|<2$

例 1.3 定义一个概率密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases} C(x+2y) & (\text{如果 } 0<y<1,\ 0<x<2) \\ 0 & (\text{其他情况}) \end{cases} \tag{1}$$

1. 求出 C 的取值
2. 找出 X 的边际分布
3. 求 (X,Y) 的联合分布函数
4. 求出随机变量 $Z=9/(X+1)^2$ 的密度函数

下例给出了分布函数的一个重要的性质:

例 1.4 设 (X,Y) 是一个二维随机向量 (X,Y) 的分布函数,$x_1<x_2,y_1<y_2$, 证明:

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geq 0 \tag{2}$$

老师上课提到的 (联合) 分布函数 $F(x,y)$ 的性质:

1. $0 \le F(x,y) \le 1$
2. $\lim_{x\to -\infty} F(x,y) = 0$, $\lim_{y\to -\infty} F(x,y) = 0$,$\lim_{x,y\to \infty} F(x,y) = 1$
3. $F(x,y)$ 对每一个分量右连续.
4. $F(x,y)$ 对每一个分量是单调不减的.

但是满足上面四条性质的函数不一定是 (联合) 分布函数, 请看下面的例子:

例 1.5 定义 $F(x,y)$, 满足当 $x<0$ 或 $x+y<1$ 或 $y<0$ 时,$F(x,y)=0$, 在其余情况下 $F(x,y)=1$. 则 $F(x,y)$ 不是一个分布函数.

例 1.6 设 X_1, X_2 均服从 $[0,4]$ 上的均匀分布, 且 $P(X_1 \le 3, X_2 \le 3) = \frac{9}{16}$, 求 $P(X_1 > 3, X_2 > 3)$.

例 1.7 *(Copula)* 设随机变量 (X,Y) 的分布函数为*:*

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & (\text{如果 } x \in [-1,1],\ y \in [0,+\infty)) \\ 1-e^{-y}, (\text{如果 } x \in [1,\infty),\ y \in [0,+\infty)) \\ 0 \quad (\text{其他情况}) \end{cases} \tag{3}$$

1. 请求出 X 和 Y 各自的边缘分布函数 *(*分别记为 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$*).*

2. 假设我们现在想找到一个函数 $C(u,v)$, 使得 $F(x,y) = C(F_1(x), F_2(y))$. 请验证

$$C(u,v) = \begin{cases} \dfrac{uv}{u+v-uv} (u,v \in (0,1)) \\ 0 \quad (\text{其他情况}) \end{cases} \tag{4}$$

符合要求.

3. 求出 $F_1(x)$ 和 $F_2(y)$ 的"反函数" $F_1^{-1}(u)$ 和 $F_2^{-1}(v)$ *(*$u \in (0,1), v \in (0,1)$*).*

4. 验证 $C(u,v) = F(F_1^{-1}(u), F_1^{-1}(v))$*(*$u \in (0,1), v \in (0,1)$*).*

References

[1] Casella, George, and Roger L. Berger. Statistical inference(2nd ed). Cengage Learning, 2002.

[2] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. " 概率论与数理统计 (第二版)." (2012).

[3] 龙永红. " 概率论与数理统计 (第四版)." (2012).