第十三次习题课

王瑞

June 2, 2022

It's easy to lie with statistics; it is easier to lie without them. – Frederick Mosteller

1 最大似然估计

例题 1.1 令随机样本 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立同分布，且密度函数（或概率分布）为 $f(x;\theta)$，找出在下列情形下的 θ 的 *MLE*。

1. $f(x;\theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} I_{(0,1)}(x)$，其中 $\theta > 0$。
2. $f(x;\theta) = \theta c^{\theta} x^{-(\theta+1)} I_{(c,\infty)}(x)$，其中 c 是一个大于 0 的已知的常数，$\theta > 1$。
3. $f(x;\theta) = \theta^{-1} I_{\{1,...,\theta\}}(x)$，其中 θ 是大于等于 1，小于等于 θ_0 的一个整数。
4. $e^{-(x-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(x)$，其中 $\theta > 0$。
5. $\theta(1-x)^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$，其中 $\theta > 1$。

例题 1.2 假设 $X_1, ..., X_n$ 是从 $N(\mu, 1)$ 抽出的随机样本，μ 是未知参数。但是出于某种原因，我们观测不到 $X_1, ..., X_n$，我们记录了每个样本的取值是否是大于 *0* 的。求 μ 的 *MLE*。

2 矩估计

例题 2.1 令随机样本 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立同分布，且密度函数（或概率分布）为 $f(x;\theta)$，找出在下列情形下的 θ 的矩估计。

1. $f(x;\theta) = \frac{2}{\theta}(\theta - x) I_{(0,\theta)}(x)$，其中 $\theta > 0$。
2. $f(x;\theta) = (\theta+1) x^{\theta} I_{(0,1)}(x)$，其中 $\theta > 0$。
3. $f(x;\theta) = \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1} I_{(0,1)}(x)$，其中 $\theta > 0$。
4. $f(x;\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{\theta_1} e^{-\frac{x-\theta_2}{\theta_1}} I_{(\theta_2,\infty)}(x)$，其中 $\theta = (\theta_1, \theta_2)$，$\theta_1 > 0$。

3 估计量的性质

例题 3.1 假设随机变量 $Y_1, ..., Y_n$ 满足*:*

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i, \qquad i = 1, ..., n \tag{1}$$

其中, $x_1, ..., x_n$ 都是固定的常数，$\epsilon_1, ..., \epsilon_n$ 是独立同分布的 $N(0, \sigma^2)$, σ^2 是未知的。

1. 求 β 的 *MLE*

2. 证明 β 的 *MLE* 是无偏的

3. 证明 $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ 也是 β 的无偏估计

4. 分别计算 β 的 *MLE* 的方差和 $\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$ 的方差, 并比较他们方差的大小

5. 证明 $\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n x_i}$ 也是无偏的。

References

[1] Casella, George, and Roger L. Berger. Statistical inference(2nd ed). Cengage Learning, 2002.

[2] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. ” 概率论与数理统计 (第二版).” (2012).

[3] 龙永红. ” 概率论与数理统计 (第四版).” (2012).

[4] Michael, Perlman. Probability and mathematical statistics, `https://sites.stat.washington.edu/people/mdperlma/STAT%20512%20MDP%20Notes.pdf`