

第十四次习题课

王瑞

June 19, 2022

All we know about the world teaches us that the effects of A and B are always different—in some decimal place—for any A and B. Thus asking “are the effects different?” is foolish. – John Tukey

1 区间估计

例题 1.1 某厂生产的化纤强度服从正态分布，长期以来其标准差稳定在 $\sigma = 0.85$ ，现在抽取了一个容量为 25 的样本，测定其长度，算得样本均值为 $\bar{x} = 2.25$ ，试求这批化纤强度期望的置信水平为 95% 的置信区间。

例题 1.2 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ 已知，问样本容量为多大时才能保证 μ 的置信水平为 95% 的置信区间长度不大于 k ？

例题 1.3 用一个仪表测量某一物理量 9 次，得样本均值 $\bar{x} = 56.32$ ，样本标准差 $s = 0.22$ 。

1. 试求 σ 的置信水平为 95% 的置信区间。
2. 求该物理量真值的置信水平为 99% 的置信区间。

例题 1.4 假设 x_1, \dots, x_n 是来自参数为 λ 的泊松分布的随机样本。试说明在 n 很大的时候的置信区间。

2 假设检验

例题 2.1 假定考生的成绩服从正态分布，在某地一次数学统考中，随机抽取了 36 名考生的成绩，算得的平均分有 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均出成绩为 70 分？

例题 2.2 考察一鱼塘中鱼的含汞量，随机地取 10 条鱼测得各条鱼地含汞量，他们地均值是 0.97，样本标准差是 0.33。试作假设检验 $H_0: \mu \leq 1.2, H_1: \mu > 1.2$ 。（设鱼的含汞量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ）

例题 2.3 加工某一机器零件，根据其精度要求，标准差不得超过 0.9，现在从该产品中抽取 19 个样本，得到样本标准差为 $S = 1.2$ ，问当 $\alpha = 0.02$ 时，是否可以认为标准差变大？（假设总体服从正态分布）

例题 2.4 设 x_1, \dots, x_n 是来自 $N(\mu, 1)$ 的样本, 考虑如下假设检验问题

$$H_0: \mu = 2 \quad vs \quad H_1: \mu = 3 \quad (1)$$

如果拒绝域是 $C = \{\bar{x} \geq 2.6\}$

(1) 当 $n = 20$ 时, 求犯两类错误的概率

(2) 如果要使得检验所犯的第二类错误的概率 $\beta \leq 0.01$, n 应该最小取多少?

(3) 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$

References

- [1] Casella, George, and Roger L. Berger. Statistical inference(2nd ed). Cengage Learning, 2002.
- [2] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. " 概率论与数理统计 (第二版)." (2012).
- [3] 龙永红. " 概率论与数理统计 (第四版)." (2012).
- [4] Michael, Perlman. Probability and mathematical statistics, <https://sites.stat.washington.edu/people/mdperlma/STAT%20512%20MDP%20Notes.pdf>